

Neues Aufgabenformat im Abitur

Was ändert sich?

(i) Grundkurs

Bisher:

Aufgabe 1	80	Aufgabe 2	80	Aufgabe 3	80
-----------	----	-----------	----	-----------	----

drei Aufgaben zu zwei Themenbereichen in 240 Minuten

Ab 2008:

Aufgabe 1	120	Aufgabe 2	120
-----------	-----	-----------	-----

zwei Aufgaben zu zwei Themenbereichen in 240 Minuten

(ii) Leistungskurs

Bisher:

Aufgabe 1	100	Aufgabe 2	100	Aufgabe 3	100
-----------	-----	-----------	-----	-----------	-----

drei Aufgaben zu zwei Themenbereichen in 300 Minuten

Ab 2008:

Aufgabe 1	150	Aufgabe 2	150
-----------	-----	-----------	-----

zwei Aufgaben zu zwei Themenbereichen in 300 Minuten

weiter für GK und LK

Die zusätzliche Zeit soll nur teilweise mit Inhalten gefüllt werden, sodass Schülerinnen und Schüler weniger unter Zeitdruck sind.

Was bleibt unverändert?

Die Anteile der Anforderungsbereiche bleiben gleich:

- Anforderungsbereich I und III jeweils etwa 20 – 25 %, wobei der Anteil von III nicht größer als jener von I sein darf.
- Anforderungsbereich II also etwa 50 – 60 %

Beispielaufgaben im neuen Format

Grundkurs

Hängebrücke

S. 2

Fischzucht

S. 7

Übungsaufgabe

Pantheon, S. 26

Leistungskurs

Wachstumsvorgänge

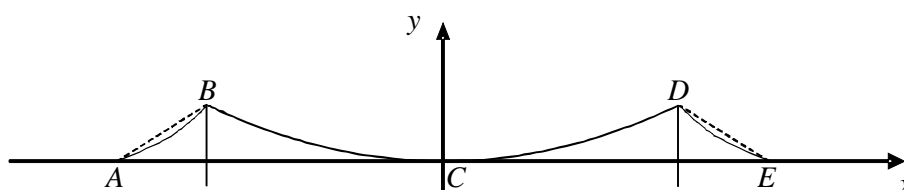
S. 12

Population

S. 19

ANALYSIS

Hängebrücke



Die Abbildung zeigt eine Skizze einer Hängebrücke. Von der Brücke sind folgende Daten bekannt:

Die Punkte B und D liegen jeweils 152 m über der geraden Fahrbahn und sind 1 280 m voneinander entfernt. Die Gesamtlänge der Fahrbahn zwischen den Punkten A und E beträgt 1 850 m.

- a) Berechnen Sie die Entfernung der Punkte A und B bzw. D und E voneinander (gestrichelte Linie).

10 P

Der Verlauf der Tragseile der Brücke, die in der Skizze eingezeichnet sind, kann mit verschiedenen mathematischen Modellen beschrieben werden. Dazu wird ein Koordinatensystem mit Punkt C als Koordinatenursprung festgelegt. Eine Längeneinheit entspricht 1 m.

Die Punkte A , C und E der Fahrbahn liegen auf der x -Achse.

Der Verlauf der Tragseile zwischen B und D wird näherungsweise durch den Graphen einer Funktion beschrieben, der durch diese beiden Punkte geht und die Fahrbahn im Punkt C berührt.

Hinweis: Bei den Berechnungen müssen die Einheiten nicht mitgeschrieben werden.

- b) In einem ersten Modell wird der Verlauf der Tragseile zwischen den Punkten B und D näherungsweise mithilfe des Graphen einer quadratischen Funktion f beschrieben.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion f .

10 P

- c) Bei Verwendung eines zweiten Modells wird der Verlauf der Tragseile zwischen den Punkten B und D durch den Graphen der Funktion k beschrieben:

$$k(x) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax}) - \frac{1}{a}, \quad a > 0.$$

- Bestätigen Sie, dass jeder Graph dieser Funktionen k achsensymmetrisch zur y -Achse ist und durch den Punkt C geht.
- Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion k auch die Punkte B und D enthält, wenn für a ein Wert eingesetzt wird, der zwischen 0,00072 und 0,00073 liegt.

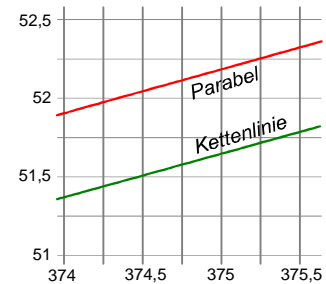
25 P

Hinweis: In allen folgenden Aufgabenteilen gilt $a = 0,00073$, sofern es dort eine Rolle spielt.

Für das Tragseil wurden zwei unterschiedliche Modelle ermittelt: in Teilaufgabe b) eine Parabel f und in Teilaufgabe c) eine so genannte Kettenlinie k .

In den nachfolgenden Teilaufgaben sollen Sie diese beiden Modelle unter verschiedenen Gesichtspunkten vergleichen: in e) hinsichtlich der Seillänge, in f) hinsichtlich der Steigung und zunächst in d) allgemein.

- d) Mit einem Funktionsplotter kann man keinen Unterschied zwischen den beiden Graphen erkennen, jedoch in einem stark vergrößerten Ausschnitt (siehe Abbildung rechts). Beschreiben Sie, wie sich der „Unterschied“ mit Hilfe der Mathematik bestimmen ließe (*keine konkreten Berechnungen*).



10 P

- e) Die Länge L_1 des Tragseils – modelliert mit k – zwischen den Punkten B und D kann mit der Formel

$$L_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-640}^{640} (e^{ax} + e^{-ax}) dx$$

berechnet werden.

- Bestimmen Sie die Länge L_1 und runden Sie diese auf zwei Nachkommastellen.

Die Länge des Tragseils für das Modell Parabel beträgt $L_2 \approx 1326,62$ m.

- Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse und interpretieren Sie diese auch hinsichtlich Teilaufgabe d).

20 P

- f) Bestimmen Sie eine obere und eine untere Schranke für die Längen L_1 und L_2 .

Beurteilen Sie damit, ob Ihr in Aufgabenteil e) ermitteltes Ergebnis für L_1 in einem realistischen Bereich liegt.

10 P

- g) Zu Wartungszwecken soll ein Wagen angeschafft werden, der auf dem Tragseil der Brücke zwischen den Punkten B und D entlang fahren kann.

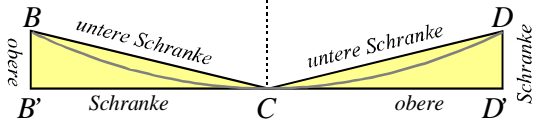
Ermitteln Sie für beide Modelle, welchen maximalen Steigungswinkel ein solcher Wagen bewältigen muss.

15 P

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Aus Symmetriegründen gilt: $AB = DE$.</p> <p>\overline{AB} ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 152 m bzw. $(1\,850\text{ m} - 1\,280\text{ m}) : 2 = 285\text{ m}$.</p> <p>$AB = \sqrt{285^2 + 152^2} = 323$.</p> <p>Die Punkte A und B (bzw. D und E) sind 323 m voneinander entfernt.</p>	10		
b)	<p>$f(x) = ax^2 + b$ mit $b = 0$, da der Punkt C auf der x-Achse liegt.</p> <p>Durch Einsetzen der Koordinaten von D erhält man</p> $152 = a \cdot 640^2 \Leftrightarrow a = \frac{19}{51200}.$ <p>Die Funktion f hat die Gleichung $f(x) = \frac{19}{51200}x^2$.</p>		10	
c)	$k(x) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax}) - \frac{1}{a}$ $= \frac{1}{2a} \cdot (e^{-a(-x)} + e^{a(-x)}) - \frac{1}{a}.$ <p><u>Bedingung für Achsensymmetrie:</u></p> $= \frac{1}{2a} \cdot (e^{a(-x)} + e^{ax}) - \frac{1}{a}$ $= k(-x)$ $k(0) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{a \cdot 0} + e^{-a \cdot 0}) - \frac{1}{a}$ $= \frac{1}{2a} \cdot (1+1) - \frac{1}{a}.$ $= \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$ <p><u>Prüfung für $D(640 152)$ und $a = 0,00072$:</u></p> $k(640) = \frac{1}{2 \cdot 0,00072} \cdot (e^{0,00072 \cdot 640} + e^{-0,00072 \cdot 640}) - \frac{1}{0,00072} \approx 150,083\dots$ <p><u>Prüfung für $D(640 152)$ und $a = 0,00073$:</u></p> $k(640) = \frac{1}{2 \cdot 0,00073} \cdot (e^{0,00073 \cdot 640} + e^{-0,00073 \cdot 640}) - \frac{1}{0,00073} \approx 152,243\dots$ <p>Weil $150,083 < 152 < 152,243$ ist der Nachweis erbracht. Wegen der Achsensymmetrie gilt die Aussage auch für den Punkt B.</p>	15	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	<p>Erwartet wird eine Ausführung mit konkreten Angaben, wie der „Unterschied“ mathematisch beschrieben werden könnte. <u>Nicht erwartet</u> wird ein Hinweis darauf, dass sich Kettenlinie und Parabel zwischen den Punkten B und C bzw. C und D noch einmal schneiden (der gerundete Wert $a = 0,00073$ führt zu Rundungsfehlern).</p> <p><u>Beispiel 1:</u> Eine Möglichkeit, den Unterschied zu erfassen, besteht darin, die Differenzfunktion zu untersuchen, also d mit $d(x) = f(x) - k(x)$ für $-640 \leq x \leq 640$.</p> <p><u>Beispiel 2:</u> Der Unterschied lässt sich beschreiben mit der Differenz der y-Koordinaten zweier Punkte F und K auf dem Graphen von f bzw. k mit denselben x-Koordinaten. Für den bei der Aufgabe abgebildeten Ausschnitt ist das etwa 0,5. Diese Differenz wäre für alle interessierenden Stellen zu untersuchen.</p> <p><u>Beispiel 3:</u> Der Unterschied lässt sich beschreiben mit dem Maß der Fläche zwischen beiden Graphen im Bereich von -640 bis 640. Es wäre also das Integral $\int_{-640}^{640} (f(x) - k(x)) dx$ zu berechnen. <i>Hinweis: wegen der Rundung des Parameters a in k gilt $k(640) > 152$, in diesem Modell endet das Seil also oberhalb von D (für B analog). Daher schneiden sich f und k jeweils in der Nähe von B bzw. D.</i></p> <p>Denkbar wäre auch, den Durchschnitt zu berechnen: $\frac{1}{1280} \int_{-640}^{640} (f(x) - k(x)) dx$.</p>			
e)	<p>Bestimmung der Tragseillänge L_1 im Intervall $-640 \leq x \leq 640$ (mit Modell k):</p> $L = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{640} (e^{ax} + e^{-ax}) dx$ $= \frac{1}{a} \cdot [e^{ax} - e^{-ax}]_0^{640}$ $= \frac{1}{0,00073} \cdot [(e^{0,00073 \cdot 640} - e^{-0,00073 \cdot 640}) - (e^0 - e^0)]$ $\approx 1\,327,076\dots$ <p>Die Kabellänge zwischen den Punkten B und D beträgt ca. 1 327 m.</p> <p>Beim Modell f ist sie nur etwa 50 cm geringer, verglichen mit der Gesamtlänge eine geringe Abweichung. Die Modellierungen des Tragseils mit der Parabel f und der Kettenlinie k unterscheiden sich in diesem wichtigen Punkt nur unwesentlich. Daraus lässt sich auch vermuten, dass der „Unterschied“ der beiden Funktionen im betrachteten Bereich nur gering sein kann.</p>		5	5
			15	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	<p>Die direkte Verbindung der Punkte B und C bzw. C und D hätte die Länge: $2 \cdot \sqrt{152^2 + 640^2} = 1315,604... \approx 1315$.</p> <p>Auch die Entfernung von B nach D (1280) wäre als untere Schranke möglich.</p> <p>Seien B' und D' die senkrechten Projektionen der Punkte B und D auf die x-Achse. Dann beträgt die Summe der waagerechten und senkrechten Komponenten des Streckenzuges $BB'CD'D$ $2 \cdot (640 + 152) = 1584$.</p>  <p>(Zeichnung nicht erwartet)</p> <p>Der in Aufgabenteil e) errechnete Wert für L_1 – nämlich ca. 1327 – liegt zwischen diesen „Grenzen“ und daher in einem realistischen Bereich. (Das gilt auch für den gegebenen Wert für L_2).</p>			10
g)	<p>Maximaler Steigungswinkel der beiden Graphen ist (z.B. nach der Skizze) jeweils am Rand, also in den Punkten B und D.</p> <p>Aus Symmetriegründen reicht die Untersuchung im Punkt D:</p> <p><u>Modell Parabel:</u></p> $f(x) = \frac{19}{51200} x^2$ $f'(x) = \frac{19}{25600} x$ $f'(640) = 0,475$ $\Rightarrow \beta = \arctan(0,475) \approx 25,41^\circ$ <p><u>Modell Kettenlinie:</u></p> $k(x) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax}) - \frac{1}{a}$ $k'(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{ax} - e^{-ax})$ $k'(640) = \frac{1}{2} \cdot (e^{0,00073 \cdot 640} - e^{-0,00073 \cdot 640}) = 0,484...$ $\Rightarrow \beta \approx \arctan 0,484 \approx 25,83^\circ$ <p>Wenn der Wagen eine maximale Steigung von etwa 26° befahren kann, ist er nach beiden Modellen geeignet.</p>		15	
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Fischzucht

Die Entwicklung einer bestimmten Fischpopulation in einem Fluss im Laufe eines Jahres beschreibt folgendes Modell:

- Nur aus einem Viertel der Eier schlüpfen junge Fische, die anderen Eier verenden. Diese Fische werden nicht älter als drei Jahre.
- Von den jungen Fischen wächst nur einer von 25 in einem Jahr zu einem erwachsenen Fisch heran, der Rest stirbt.
- Jeder zweite erwachsene Fisch überlebt ein weiteres Jahr und zählt dann zur Gruppe der alten Fische.
- Jeder erwachsene Fisch legt 50 Eier. Jeder alte Fisch legt sogar 100 Eier.

Benutzen Sie abkürzend: $\left\{ \begin{array}{l} N = \text{Anzahl der Eier} \\ J = \text{Anzahl der jungen Fische} \\ E = \text{Anzahl der erwachsenen Fische} \\ A = \text{Anzahl der alten Fische} \end{array} \right.$

- a) Stellen Sie das beschriebene Modell mit einem Graphen dar. **10 P**

- b) Die zum Modell gehörende Populationsmatrix P lautet: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 100 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$.

- Interpretieren Sie die erste Zeile der Matrix P im Sachkontext der Aufgabe.
- Geben Sie die Bedeutung des Matrixelements $p_{3,2}$ an.
- Begründen Sie, weshalb die Hauptdiagonale nur Nullen enthält. **10 P**

Hinweis: Wenn nichts anderes angegeben ist, wird in den folgenden Aufgaben P als Populationsmatrix verwendet.

- c) Die Fischpopulation setzt sich zum Untersuchungszeitpunkt aus 500 Eiern, 50 jungen Fischen, 6 erwachsenen Fischen und 3 alten Fischen zusammen. Berechnen Sie mit Hilfe der Populationsmatrix P die Fischpopulation nach einem und nach zwei Jahren. **15 P**
- d) Ermitteln Sie eine Startpopulation, aus der nach einem Jahr 600 Eier, 100 junge Fische, 3 erwachsene Fische und 4 alte Fische geworden sind. **20 P**
- e) Bestimmen Sie einen Anfangsbestand, der sich jedes Jahr reproduziert und der zusammen 106 junge, erwachsene und alte Fische enthält. **20 P**

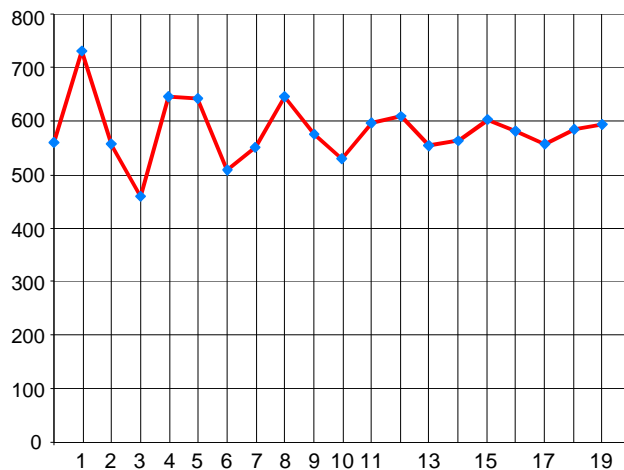
In den folgenden beiden Teilaufgaben geht es um die Entwicklung der Gesamtzahl der Population.

- f) In der Tabelle sehen Sie die Entwicklung der Gesamtpopulation nach obigem Modell – inklusive der Eier, basierend auf der Startpopulation aus c).

Jahr	Population
0	
1	
2	
3	459
4	645
5	643
6	507
7	552
8	644
9	575
10	529
11	598
12	609
13	552
14	564
15	604
16	581
17	558
18	584
19	592

Berechnen Sie die drei fehlenden Werte und vervollständigen Sie so die Tabelle links.

Beschreiben Sie das aus nebenstehender Grafik und der Wertetabelle zu erwartende Langzeitverhalten der Population.

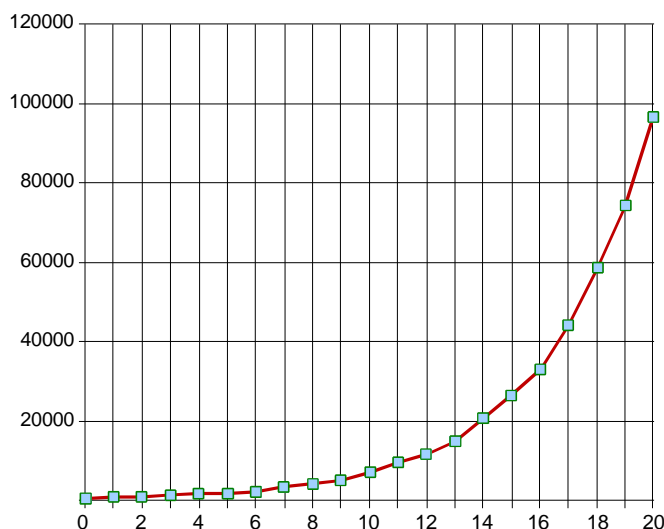


5 P

- g) Eine „kleine“ Abänderung des Modells kann die Langzeitentwicklung nachhaltig verändern. Die neue Populationsmatrix Q unterscheide sich von P lediglich im Element $q_{3,2} = 0,1$ (anstelle von $0,04$). Alle übrigen Elemente bleiben unverändert.

Mit der Matrix Q ergeben sich nun die folgenden Daten bei derselben Startpopulation (aus c)):

Jahr	Population
0	559
1	733
2	715
3	1034
4	1615
5	1810
6	2186
7	3311
8	4281
9	4995
10	6871
11	9490
12	11595
13	14833
14	20452
15	26357
16	33035
17	44105
18	58511
19	74239
20	96425



Die Anzahl der Gesamtpopulation scheint sich exponentiell zu entwickeln, eine Näherung für die Daten liefert eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot b^{x+1}$.

Ermitteln Sie einen Ansatz, um geeignete Konstante a und b berechnen zu können, und bestimmen Sie damit die Konstanten.

15 P

Hinweis: Rechnen Sie so genau wie möglich und runden Sie die gesuchten Größen auf 4 Nachkommastellen.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Mit der Bezeichnung aus der Aufgabenstellung ergibt sich folgender Graph:</p>	5	5	
b)	<p>Die erste Zeile der Populationsmatrix P enthält die Geburtenraten der zugehörigen Altersklassen. Die Geburtenrate ist hier die Anzahl der Eier, die im Laufe eines Jahres von einem Individuum (Ei oder Fisch) in der zugehörigen Altersklasse gelegt wird. Eier und junge Fische bringen keine Eier hervor, weshalb die beiden Matrixelemente $p_{1,1}$ und $p_{1,2}$ jeweils Null sind. Nur erwachsene und alte Fische erzeugen Eier in den angegebenen Stückzahlen ($p_{1,3}$ und $p_{1,4}$).</p> <p>Das Matrixelement $p_{3,2} = 0,04$ gibt die Überlebensrate der jungen Fische an.</p> <p>Die Hauptdiagonale enthält nur Nullen, da kein Individuum in der zugehörigen Altersklasse verbleibt. Die entsprechenden Anteile sind daher jeweils Null.</p>		10	
c)	<p>Die Startpopulation wird durch den Vektor $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} N \\ J \\ E \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 50 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ beschrieben.</p> <p>Fischpopulation nach einem Jahr:</p> $\vec{x}_1 = P \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 100 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 50 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 125 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ <p>Nach einem Jahr besteht die Population aus 600 Eiern, 125 jungen Fischen, 2 erwachsenen Fischen und 3 alten Fischen.</p> <p>Fischpopulation nach zwei Jahren: $\vec{x}_2 = P \cdot \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 400 \\ 150 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.</p> <p>Nach zwei Jahren besteht die Population aus 400 Eiern, 150 jungen Fischen, 5 erwachsenen Fischen und einem alten Fisch.</p> <p>Alternativ kann der Bestand nach zwei Jahren auch über den Ansatz $\vec{x}_2 = P^2 \cdot \vec{x}_0$ errechnet werden.</p>			15

Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung						
		I	II	III				
d)	<p>Zur Ermittlung der gesuchten Startpopulation \vec{x}_0 wird folgender Ansatz benutzt:</p> $\vec{x}_1 = P \cdot \vec{x}_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 600 \\ 100 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} N \\ J \\ E \\ A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{I } 600 = 50E + 100A \\ \text{II } 100 = 0,25N \\ \text{III } 3 = 0,04J \\ \text{IV } 4 = 0,5E \end{array}$ <p>IV $\Rightarrow E = 2 \cdot 4 = 8$, III $\Rightarrow J = 25 \cdot 3 = 75$, II $\Rightarrow N = 4 \cdot 100 = 400$. Der Wert für A ergibt sich aus I: $100A = 600 - 400 = 200 \Rightarrow A = 2$. Lösen des LGS ergibt: $\vec{x}_0 = (400 75 8 2)$. Die Startpopulation \vec{x}_0 besteht also aus 400 Eiern, 75 jungen Fischen, 8 erwachsenen Fischen und 2 alten Fischen.</p>						20	
e)	<p>Möglicher Lösungsweg:</p> <p>Für eine sich reproduzierende Population \vec{x}^* gilt:</p> $\vec{x}^* = P \cdot \vec{x}^* \Leftrightarrow \begin{pmatrix} N \\ J \\ E \\ A \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} N \\ J \\ E \\ A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} N = 50E + 100A \\ J = 0,25N \\ E = 0,04J \\ A = 0,5E \end{array}$ <p>Das LGS hat unendliche viele Lösungen. Mit dem Parameter $t \in \mathbb{N}$ für die Anzahl A der alten Fische ergeben sich zunächst unendlich viele Populationsvektoren $\vec{x}^* = (200t 50t 2t t)$. Die einschränkende Bedingung von zusammen 106 jungen, erwachsenen und alten Fischen führt schließlich auf nur einen möglichen Anfangsbestand $\vec{x}^* : J + E + A = 50t + 2t + t = 53t = 106 \Leftrightarrow t = 2$. Setzt man $t = 2$ in \vec{x}^* ein, so folgt: $\vec{x}^* = (400 100 4 2)$. Die sich reproduzierende Population enthält somit 400 Eier, 100 junge, 4 erwachsene und 2 alte Fische. <i>Alternativ kann die einschränkende Bedingung gleich beim Aufstellen des LGS berücksichtigt werden:</i> Für die sich reproduzierende Population \vec{x}^* gilt:</p> $\vec{x}^* = P \cdot \vec{x}^* \wedge x_2^* + x_3^* + x_4^* = 106 \Leftrightarrow \begin{array}{l} N = 50E + 100A \\ J = 0,25N \\ E = 0,04J \\ A = 0,5E \\ J + E + A = 106 \end{array}$ <p>Die Lösung dieses LGS führt auf die o.a. Lösung $\vec{x}^* = (400 100 4 2)$.</p>						10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	<p><u>Tabellenwerte berechnen:</u></p> <p>Startpopulation = (500 50 6 3), insgesamt also $500+50+6+3 = 559$, Population nach 1 Jahr = (600 125 2 3), insgesamt also $600+125+2+3 = 730$, Population nach 2 Jahren = (400 150 5 1), insgesamt also $400+150+5+1 = 556$.</p> <p><u>Beschreibung der Langzeitentwicklung:</u></p> <p>Die Anzahl der Gesamtpopulation scheint sich langfristig bei einem festen Wert einzupendeln (etwa in der Größenordnung von leicht unter 600 nach den vorliegenden Daten).</p>	5	5	
g)	<p><u>Stetiges Modell:</u></p> <p>Ansatz: Einsetzen von zwei Punkten aus der Tabelle führt auf zwei Gleichungen mit zwei Variablen:</p> <p>Lösungsvorschlag 1: Punkte (0 559) und (20 96425) \Rightarrow $f(0) = a \cdot b^1 = 559 \Rightarrow a = \frac{559}{b}$ und $f(20) = a \cdot b^{21} = 96425$</p> <p>$a$ eingesetzt in 2. Gleichung $\Rightarrow 559 \cdot b^{20} = 96425 \Rightarrow b = \sqrt[20]{\frac{96425}{559}} \approx 1,2937$</p> <p>$b$ eingesetzt in 1. Gleichung ergibt: $a \approx 432,0887$</p> <p>Die Funktionsgleichung lautet also gerundet $f_1(x) = 432,0887 \cdot 1,2937^{x+1}$</p> <p>Lösungsvorschlag 2: Punkte (8 4281) und (17 44105) \Rightarrow $f(8) = a \cdot b^9 = 4281 \Rightarrow a = \frac{4281}{b^9}$ und $f(17) = a \cdot b^{18} = 44105$</p> <p>$a$ eingesetzt in 2. Gleichung $\Rightarrow 4281 \cdot b^9 = 44105 \Rightarrow b = \sqrt[9]{\frac{44105}{4281}} \approx 1,2958$</p> <p>$b^9$ eingesetzt in 1. Gleichung ergibt: $a \approx 415,5302$</p> <p>Die Funktionsgleichung lautet also gerundet $f_2(x) = 415,5302 \cdot 1,2958^{x+1}$.</p> <p><i>Die erste Lösung ist am Rand besser, die zweite in der „Mitte“. Die von der Tabellenkalkulation vorgeschlagene Funktion g mit $g(x) = 388,04 \cdot 1,3^{x+1}$ ist auch nicht viel näher an den Datenpunkten als die hier berechneten Funktionen.</i></p>			15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

ANALYSIS

Wachstumsvorgänge

Es geht in dieser Aufgabe um Wachstumsvorgänge, die mit einer Funktion f modelliert werden können, für die gilt

$$f(x) = \frac{K}{1 + c \cdot e^{-p \cdot K \cdot x}}.$$

Die positiven Parameter K , p und c (und $c > 1$) dienen der Anpassung der Funktion an den Wachstumsvorgang, die im Sachkontext nicht negative x -Koordinate beschreibt die Zeit seit Beginn der Beobachtung, die y -Koordinate den Bestand.

- a) In dieser Teilaufgabe soll mit obigem Funktionstyp die Ausbreitung einer Krankheit unter den 50 Tieren in einem abgeteilten Bereich eines Tiergartens beschrieben werden. Dazu sei $K = 50$ und $p = 0,02$. Die Zeit wird in Tagen gemessen, der „Bestand“ ist die Anzahl der infizierten Tiere.

Diese Spezialisierung von f ist bisher aber nicht eindeutig, weil der Parameter c noch gewählt werden kann. Das geschieht hier über die Angabe eines Startwertes. Diese Spezialisierung von f heiße dann f_1 .

Parameter c :

Berechnen Sie die Konstante c , sodass $f_1(0) = 1$ gilt und interpretieren Sie die Startvorgabe $f_1(0) = 1$ im Sachkontext der Aufgabe.

Geben Sie eine allgemeine Formel zur Berechnung von c an bei gegebenem K und gewünschtem Startwert $f(0)$.

Parameter K :

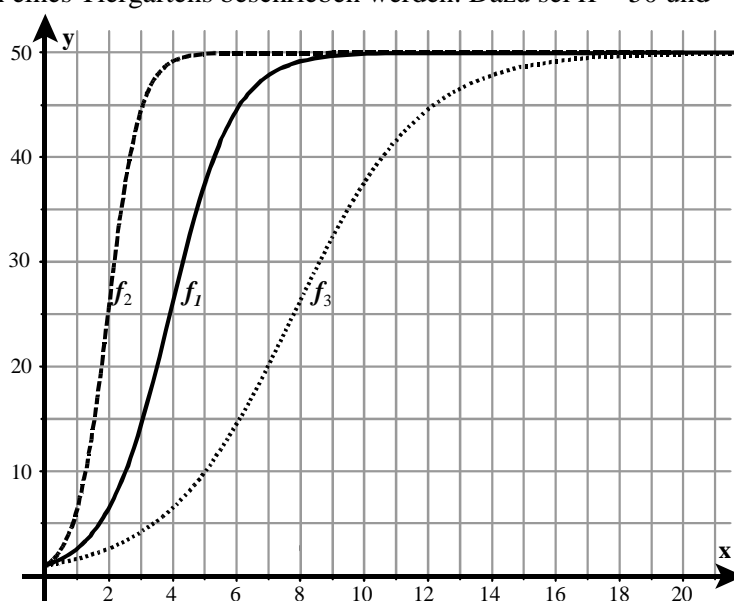
Geben Sie an, welche Bedeutung der Parameter K in diesem Wachstumsmodell (basierend auf f oder f_1) hat, und begründen Sie Ihre Aussage mit Hilfe des Funktionsterms.

Parameter p :

Der Term von f_2 (Graph gestrichelt, links von f_1) unterscheidet sich von $f_1(x)$ im Wert des Parameters p , analoges gilt für $f_3(x)$.

Bestimmen Sie näherungsweise für beide Funktionsterme den jeweiligen Wert von p .

Geben Sie die Bedeutung dieses Parameters an (mathematisch und im Sachkontext) und begründen Sie Ihre Angaben.

**20 P**

In den beiden folgenden Teilaufgaben geht es um die Untersuchung von Eigenschaften der (allgemeinen) Funktion f mit ihrem oben angegebenen Term und deren Deutung bei Wachstumsvorgängen.

Hinweis: b) und c) können Sie – bei Punktabzug – auch mit der Funktion f_1 aus a) bearbeiten.

b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Extremwerte, Wendepunkte und Monotonie.

Interpretieren Sie die ermittelten Eigenschaften im Sachkontext von Wachstumsvorgängen. **35 P**

$$\text{Zur Kontrolle: } f''(x) = cp^2 K^3 \cdot e^{-pKx} \cdot \frac{c \cdot e^{-pKx} - 1}{(1 + c \cdot e^{-pKx})^3}.$$

c) In dieser Teilaufgabe geht es um die Wachstumsgeschwindigkeit.

- Begründen Sie, warum die 1. Ableitung von f als Wachstumsgeschwindigkeit gedeutet werden kann.

- Zeigen Sie, dass für die Wachstumsgeschwindigkeit f' folgende Beziehung gilt:

$$f'(x) = p \cdot f(x) \cdot (K - f(x)),$$

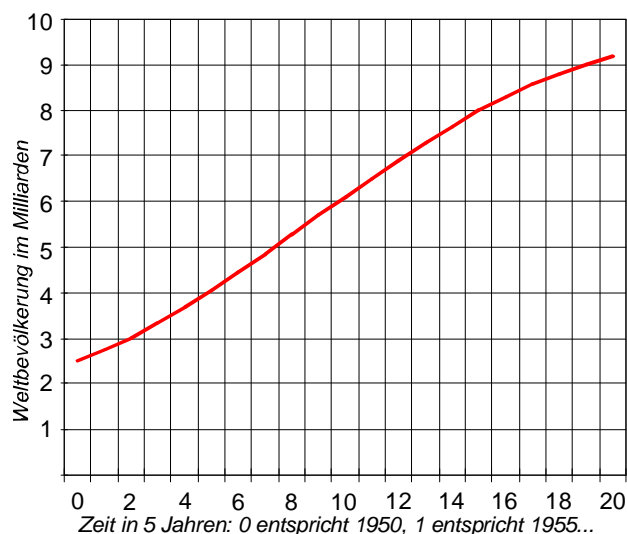
wobei p und K die Parameter von f sind.

- Bestimmen Sie den Punkt, an dem die Wachstumsgeschwindigkeit maximal wird.
- Interpretieren Sie die Differentialgleichung und das Maximum der Wachstumsgeschwindigkeit.

30 P

d) Eignet sich das hier behandelte Wachstumsmodell zur Berechnung von Prognosen über die Entwicklung der Weltbevölkerung? Das sollen Sie an Daten der UN aus dem Jahr 2006 untersuchen. Die Angaben zur Weltbevölkerung sind in Milliarden:

Jahr	Weltbevölkerung in Milliarden
1950	2,535
1955	2,771
1960	3,032
1965	3,343
1970	3,699
1975	4,076
1980	4,451
1985	4,855
1990	5,295
1995	5,719
2000	6,124
2005	6,515
2010	6,907
2015	7,295
2020	7,667
2025	8,011
2030	8,318
2035	8,587
2040	8,824
2045	9,026
2050	9,191



Graph erstellt von Excel aus den Daten

Hinweis: Experten rechnen mit einer Stabilisierung der Weltbevölkerung etwa ab 2100 bei ca. 11 Milliarden.

- Bestimmen Sie an Hand der vorliegenden Informationen die Parameter K , c und p der Funktion f geeignet.
- Beurteilen Sie, in wie weit dieses Wachstumsmodell für Bevölkerungsprognosen geeignet erscheint.

15 P

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Startwert:</p> $f_1(0) = \frac{50}{1+c} = 1 \Rightarrow 1+c = 50, \text{ also } c = 49.$ <p>$f_1(0) = 1$ bedeutet, dass die Beobachtung der Infektion bei einem kranken Tier begonnen wurde.</p> <p>Die allgemeine Formel ergibt sich analog zur speziellen:</p> $f(0) = \frac{K}{1+c} \Rightarrow c = \frac{K}{f(0)} - 1$ <p>Bedeutung von K:</p> <p><i>Diese Teilaufgabe kann basierend auf f oder f_1 gelöst werden.</i></p> <p>Die Funktionswerte konvergieren gegen K, genauer: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = K$, denn</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-pK \cdot x} = 0 \text{ für alle zugelassenen Parameterwerte.}$ <p>Die Funktionswerte konvergieren gegen 50, genauer: $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = 50$, denn</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0, \text{ der Grenzwert des Nenners ist daher } 1.$ <p>Parameter p:</p> <p>Aus der Skizze liest man ab, dass $f_2(2) \approx 25$ gilt. Daraus folgt</p> $\frac{50}{1+49 \cdot e^{-p \cdot 50 \cdot 2}} \approx 25 \Rightarrow e^{-100 \cdot p} \approx \frac{1}{49} \Rightarrow p \approx \frac{\ln \frac{1}{49}}{-100} = 0,0389... \Rightarrow p \approx 0,04$ <p>Aus der Skizze liest man ab, dass $f_3(7) \approx 20$ gilt. Daraus folgt analog</p> $\frac{50}{1+49 \cdot e^{-p \cdot 50 \cdot 7}} \approx 20 \Rightarrow e^{-350 \cdot p} \approx \frac{1}{20} \Rightarrow p \approx \frac{\ln \frac{1}{20}}{-350} = 0,009961... \Rightarrow p \approx 0,01.$ <p>Der Parameter p wirkt zusammen mit K. Über das Produkt $p \cdot K$ kann der Graph der Funktion in x-Richtung gestaucht oder gestreckt werden, denn im Funktionsterm wird x ersetzt durch $pK \cdot x$:</p> <p>Für f_2 gilt $pK \approx 2 > 1$, also gegenüber f_1 in x-Richtung gestaucht. Damit wird die Wachstumsgeschwindigkeit erhöht (bei unverändertem Start- und Grenzwert).</p> <p>Für f_3 gilt $pK \approx 0,5 < 1$ und daher ist der zugehörige Graph im Vergleich zum Graphen von f_1 in x-Richtung gestreckt, also wird die Wachstumsgeschwindigkeit verlangsamt.</p> <p><u>Alternative Lösung über Vergleich, wann die Hälfte der Tiere infiziert sind:</u></p> <p>Die Hälfte der Tiere ist im Modell f_1: nach etwa 4 Tagen erkrankt, im Modell f_2 nach etwa 2 Tagen, also in der halben Zeit.</p> <p>Ist p so etwas wie „Ansteckungsgefahr“, müsste der Wert bei f_2 doppelt so groß sein wie bei f_1: $p \approx 0,04$. Eine Überprüfung am Graphen von f_2 zeigt, dass dies näherungsweise zutrifft.</p> <p>Analoge Argumente führen bei f_3 auf $p \approx 0,01$.</p> <p>Die Größe von p beeinflusst, wie schnell der Nenner des Funktionsterms gegen 1 strebt, also wie schnell alle Tiere erkrankt sind (<i>Ansteckungsgefahr</i>).</p>	10	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	<p>Ableitungen:</p> $f(x) = \frac{K}{1 + c \cdot e^{-pKx}}$ $f'(x) = \frac{0 - K \cdot c \cdot e^{-pKx} \cdot (-pK)}{(1 + c \cdot e^{-pKx})^2} = \frac{cpK^2 \cdot e^{-pKx}}{(1 + c \cdot e^{-pKx})^2}$ $= cpK^2 \frac{e^{-pKx}}{(1 + c \cdot e^{-pKx})^2}$ $f''(x) = cpK^2 \cdot \frac{-pK \cdot e^{-pKx} \cdot (1 + c \cdot e^{-pKx})^2 - e^{-pKx} \cdot 2(1 + c \cdot e^{-pKx})(-pK) \cdot ce^{-pKx}}{(1 + c \cdot e^{-pKx})^4}$ $= cpK^2 \cdot pK \cdot e^{-pKx} \cdot \frac{-(1 + c \cdot e^{-pKx}) + 2 \cdot ce^{-pKx}}{(1 + c \cdot e^{-pKx})^3}$ $= cp^2 K^3 \cdot e^{-pKx} \cdot \frac{-1 - c \cdot e^{-pKx} + 2c \cdot e^{-pKx}}{(1 + c \cdot e^{-pKx})^3}$ $= cp^2 K^3 \cdot e^{-pKx} \cdot \frac{c \cdot e^{-pKx} - 1}{(1 + c \cdot e^{-pKx})^3}$ <p>Extremwerte, Monotonie:</p> <p>Da e^x für jedes reelle x positiv ist und auch alle Parameter positiv sind, kann $f'(x)$ nicht Null werden, genauer ist es sogar für alle reellen x positiv. Daraus folgt, dass es <u>keine Extremwerte</u> gibt und die <u>Funktion f monoton wächst</u>.</p> <p>Wendepunkte:</p> <p>Der Zähler von f'' ist Null, wenn $c \cdot e^{-pKx} = 1 \Rightarrow e^{pKx} = c \Rightarrow pKx = \ln c$.</p> <p>Damit gilt $x_w = \frac{\ln c}{pK}$ ist die einzige Nullstelle von f''.</p> <p>Daher kann wegen der Stetigkeit von f durch Einsetzen einer x-Koordinate mit $x < x_w$ bzw. mit $x > x_w$ in f'' untersucht werden, ob bei der Nullstelle ein Vorzeichenwechsel stattfindet (<i>Nachweis auch mithilfe der 3. Ableitung möglich</i>):</p> $x_1 = 0 < x_w \quad : f''(0) = cp^2 K^3 \cdot 1 \cdot \frac{c-1}{(1+c)^3} > 0$ $x_2 = \frac{\ln(c+1)}{pK} > x_w \quad : f''(x_2) = cp^2 K^3 \cdot (-(c+1)) \cdot \frac{c \cdot (-c-1) - 1}{(1-c \cdot (c+1))^3} < 0$ <p>da $-(c+1)$ negativ ist und alle sonstigen Faktoren (einschließlich Bruch) positiv sind. Es findet also ein Vorzeichenwechsel statt und es gilt damit: Linkskrümmung des Graphen von f'' für $x < x_w$ und Rechtskrümmung sonst.</p> <p>Da $f(x_w) = \frac{K}{1 + c \cdot e^{-pK \cdot \frac{\ln c}{pK}}} = \frac{K}{1 + c \cdot e^{-\ln c}} = \frac{K}{1 + c \cdot (e^{\ln c})^{-1}} = \frac{K}{1 + c \cdot c^{-1}} = \frac{K}{2}$,</p> <p>lautet der Wendepunkt $W = \left(\frac{\ln c}{pK} \mid \frac{K}{2} \right)$.</p>			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p><i>Fortsetzung Teilaufgabe c):</i></p> <p>Interpretation:(Vorschlag)</p> <p>Die Wachstumsgeschwindigkeit ist proportional sowohl zum Bestand $f(x)$ als auch zum Abstand des Bestandes zur Kapazität $(K - f(x))$.</p> <p>Ein kleiner Bestand bedeutet, dass der Faktor $(K - f(x))$ kaum kleiner als K ist, und damit $f'(x) \approx p \cdot K \cdot f(x)$. Es liegt also annähernd exponentielles Wachstum vor, die Einschränkungen des Lebensraumes (oder die Sterberate) spielen noch keine Rolle.</p> <p>Ein kleiner Abstand zur Kapazität (hoher Bestand) bedeutet, dass der Bestand fast gleich der Kapazität ist, also $f'(x) \approx 0$: eine Zunahme des Bestandes ist nicht mehr möglich.</p> <p>Maximale Geschwindigkeit liegt vor, wenn die beiden Faktoren $(K - f(x))$ und $f(x)$ gleich groß sind, denn an dieser Stelle ist gerade der halbe Bestand erreicht.</p> <p><i>Nicht erwartet: Multipliziert man aus, so ergibt sich die Gleichung</i></p> $f'(x) = p \cdot K \cdot f(x) - p \cdot (f(x))^2,$ <p><i>die Wachstumsgeschwindigkeit hängt also quadratisch vom Bestand ab.</i></p>	5	15	10
d)	<p>Vorschlag für die Bestimmung der Parameter:</p> <p>Die Zunahme der Weltbevölkerung in der Prognose schwächt sich etwa ab der Mitte der Datenfolge sichtbar ab, liegt jedoch deutlich über Null. Nach dem Aufgabentext und der Skizze könnte als Grenzwert $K = 11$ in Frage kommen. Als Startwert kann $f(0) = 2,535$ genommen werden, wobei die Zeit mit $x = 0$ bei 1950 beginnt und in Schritten von 5 Jahren voranschreitet.</p> <p>Dann ist $c = \frac{K}{\text{Startwert}} - 1 = \frac{11}{2,535} - 1 = \frac{8465}{2535} \approx 3,339$</p> <p>Den Wert des Parameters p erhält man z.B. mit Hilfe eines mittleren Punktes (Jahr 2000) $f(10) = 6,124$:</p> $6,124 = \frac{11}{1 + \frac{8465}{2535} \cdot e^{-p \cdot 11 \cdot 10}} = f(10)$ $1 + \frac{8465}{2535} \cdot e^{-p \cdot 110} = \frac{11}{6,124}$ $\frac{8465}{2535} \cdot e^{-p \cdot 110} = \frac{11 - 6,124}{6,124}$ $e^{-p \cdot 110} = \frac{4876 \cdot 2535}{6124 \cdot 8465}$ <p>Damit gilt $p = \frac{\ln \frac{4876 \cdot 2535}{6124 \cdot 8465}}{-110} \approx 0,013$</p> <p><i>Die Werte der Parameter können sich naturgemäß unterscheiden, wodurch sich auch die mit der Funktion f berechneten Zahlen von den unten abgebildeten unterscheiden.</i></p>			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung																																																																				
		I	II	III																																																																		
	<p><i>Fortsetzung Teilaufgabe d):</i></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Jahr</th> <th>UNO</th> <th>Modell</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1950</td><td>2,535</td><td>2,535</td></tr> <tr><td>1955</td><td>2,771</td><td>2,825</td></tr> <tr><td>1960</td><td>3,032</td><td>3,137</td></tr> <tr><td>1965</td><td>3,343</td><td>3,468</td></tr> <tr><td>1970</td><td>3,699</td><td>3,817</td></tr> <tr><td>1975</td><td>4,076</td><td>4,182</td></tr> <tr><td>1980</td><td>4,451</td><td>4,559</td></tr> <tr><td>1985</td><td>4,855</td><td>4,946</td></tr> <tr><td>1990</td><td>5,295</td><td>5,338</td></tr> <tr><td>1995</td><td>5,719</td><td>5,732</td></tr> <tr><td>2000</td><td>6,124</td><td>6,124</td></tr> <tr><td>2005</td><td>6,515</td><td>6,510</td></tr> <tr><td>2010</td><td>6,907</td><td>6,885</td></tr> <tr><td>2015</td><td>7,295</td><td>7,247</td></tr> <tr><td>2020</td><td>7,667</td><td>7,593</td></tr> <tr><td>2025</td><td>8,011</td><td>7,921</td></tr> <tr><td>2030</td><td>8,318</td><td>8,228</td></tr> <tr><td>2035</td><td>8,587</td><td>8,515</td></tr> <tr><td>2040</td><td>8,824</td><td>8,780</td></tr> <tr><td>2045</td><td>9,026</td><td>9,023</td></tr> <tr><td>2050</td><td>9,191</td><td>9,245</td></tr> </tbody> </table> <p>Beurteilung: (Vorschlag)</p> <p>Die Entwicklung der Menschheit geschieht in den verschiedenen Kontinenten und Ländern z.T. extrem unterschiedlich. Niedrige Geburtenraten haben ihre Ursachen nicht im begrenzten Lebensraum, kurze Lebenserwartung teilweise schon. Die Idee des Modells, die in der DGL sichtbar wird, scheint nicht geeignet. Der in der Aufgabe abgebildete Graph zu den Daten sieht jedoch „typisch“ aus, sodass zumindest der optische Eindruck eine Eignung des Modells möglich erscheinen lässt.</p> <p><i>Die berechneten Modell-Zahlen liegen erstaunlich nahe an jenen der UN, was jedoch bei andern Parameterwerten schon abweichend sein kann.</i></p> <p><i>Die Wertetabelle wird nicht erwartet.</i></p>	Jahr	UNO	Modell	1950	2,535	2,535	1955	2,771	2,825	1960	3,032	3,137	1965	3,343	3,468	1970	3,699	3,817	1975	4,076	4,182	1980	4,451	4,559	1985	4,855	4,946	1990	5,295	5,338	1995	5,719	5,732	2000	6,124	6,124	2005	6,515	6,510	2010	6,907	6,885	2015	7,295	7,247	2020	7,667	7,593	2025	8,011	7,921	2030	8,318	8,228	2035	8,587	8,515	2040	8,824	8,780	2045	9,026	9,023	2050	9,191	9,245		10	5
Jahr	UNO	Modell																																																																				
1950	2,535	2,535																																																																				
1955	2,771	2,825																																																																				
1960	3,032	3,137																																																																				
1965	3,343	3,468																																																																				
1970	3,699	3,817																																																																				
1975	4,076	4,182																																																																				
1980	4,451	4,559																																																																				
1985	4,855	4,946																																																																				
1990	5,295	5,338																																																																				
1995	5,719	5,732																																																																				
2000	6,124	6,124																																																																				
2005	6,515	6,510																																																																				
2010	6,907	6,885																																																																				
2015	7,295	7,247																																																																				
2020	7,667	7,593																																																																				
2025	8,011	7,921																																																																				
2030	8,318	8,228																																																																				
2035	8,587	8,515																																																																				
2040	8,824	8,780																																																																				
2045	9,026	9,023																																																																				
2050	9,191	9,245																																																																				
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20																																																																		

Population

Mäuse in einer bestimmten Population können bis zu zwei Jahre alt werden.

Sie sind in die Altersklasse M_1 der bis zu einjährigen Mäuse und in die Altersklasse M_2 der bis zu zweijährigen Mäuse unterteilt. Die jungen Mäuse M_1 produzieren jährlich durchschnittlich vier überlebende Nachkommen. 50% der jungen Mäuse werden zwei Jahre alt und haben als alte Mäuse in M_2 noch jährlich durchschnittlich zwei überlebende Nachkommen, bevor sie sterben.

Hinweis: Die Geburtenraten sind auf weibliche und männliche Tiere hochgerechnet.

- a) Geben Sie eine graphische Darstellung dieses Lebenszyklus (Übergangsgraph) an und die zugehörige Populationsmatrix (Übergangsmatrix) M und begründen Sie jeweils Ihren Lösungsvorschlag.

15 P

- b) Rechnen Sie im Folgenden mit der Matrix $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie die Mäusepopulation nach zwei Jahren bei einer Ausgangspopulation von 100 Mäusen der Altersklasse M_1 und 100 Mäusen der Altersklasse M_2 .
- Geben Sie an, wann die M_1 -Population erstmals die Zahl von 10.000 überschreitet.

10 P

- c) Durch Umwelteinflüsse wird die Anzahl der Nachkommen (jung und alt) halbiert, während die Sterblichkeit der lebenden Tiere dadurch nicht beeinflusst wird.

- Geben Sie begründet eine Matrix H an, die basierend auf M diesen Sachverhalt beschreibt.

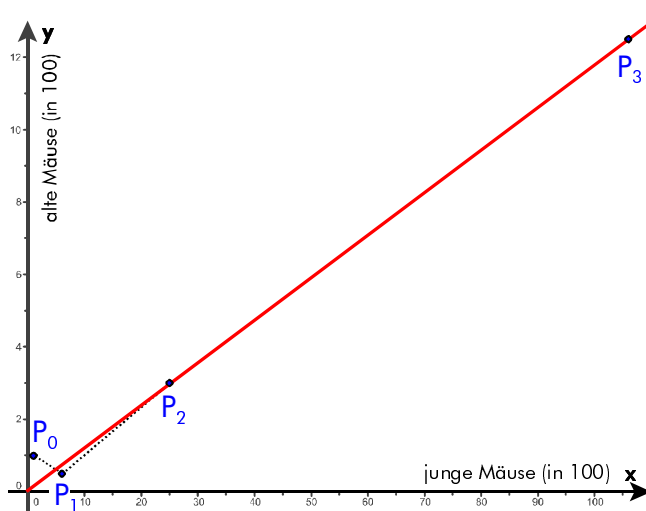
Dadurch verlangsamt sich zwar das Wachstum, es soll aber ein Stillstand des Wachstums durch Maßnahmen zur Geburtenkontrolle (angewendet auf die jungen und die alten Mäuse) erreicht werden. Das wird mathematisch durch einen Faktor r an den entsprechenden Stellen der Matrix H erreicht.

- Zeigen Sie, dass in diesem Modell die Größe einer Population nach einem Jahr nur dann erhalten bleibt, wenn in der Population doppelt so viele M_1 -Mäuse wie M_2 -Mäuse vorhanden sind.
- Berechnen Sie den Faktor r so, dass eine beliebige Population von Mäusen im Verhältnis $M_1 : M_2 = 2 : 1$ im Laufe der Jahre den Anzahlen nach unverändert bleibt.

20 P

Alle folgenden Teilaufgaben beziehen sich auf die Matrix M aus b).

- d) Betrachten Sie auch wieder eine Ausgangspopulation von 100 M_1 -Mäusen und 100 M_2 -Mäusen. Zeichnet man für die einzelnen Generationen Populationspaare in ein Koordinatensystem (Abb. rechts: Anfangspopulation $P_0 = (1|1)$, nach einem Jahr $P_1 = (6|0,5)$ usw.), so scheinen die Populationspaare immer besser auf einer Geraden zu liegen und von Jahr zu Jahr „in immer größeren Sprüngen nach rechts oben zu wandern“.



- Bestimmen Sie aus der graphischen Darstellung (näherungsweise) die Gleichung dieser Geraden.
- Interpretieren Sie diese Beobachtungen als Aussagen über die Populationsentwicklung bzw. die Altersstruktur der Population.

10 P

Alle folgenden Teilaufgaben beziehen sich weiterhin auf die Matrix M aus b).

Nun soll die in d) vermutete Altersstruktur genauer untersucht werden.

e) Seien $P_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $P_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ Populationsvektoren und c eine Konstante mit $a_1, a_2, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$

und M sei die Matrix aus b).

Bestätigen Sie die Gültigkeit einer der folgenden Rechenoperationen, die in f) und g) verwendet werden:

$$(1) M \cdot (c \cdot P_1) = c \cdot (M \cdot P_1)$$

$$(2) M \cdot (P_1 + P_2) = M \cdot P_1 + M \cdot P_2$$

$$(3) M^2 \cdot P_1 = (M \cdot M) \cdot P_1 = M \cdot (M \cdot P_1) \quad (\text{Spezialfall von: } M^n P_1 = (M \cdot M^{n-1}) P_1 = M \cdot (M^{n-1} P_1)).$$

10 P

f) Die in Teilaufgabe g) vermutete Entwicklung der Population sollen Sie hier zunächst für eine spezielle Startpopulation nachweisen:

- Zeigen Sie, dass es genau zwei Paare (a, λ) reeller Zahlen gibt, die folgende Gleichung lösen:

$$M \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

(Zur Kontrolle: 1. Lösung: $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5} \approx 4,24$, $a_1 = 4 + 2 \cdot \sqrt{5} \approx 8,47$ und

2. Lösung: $\lambda_2 = 2 - \sqrt{5} \approx -0,24$, $a_2 = 4 - 2 \cdot \sqrt{5} \approx -0,47$).

- Bestätigen Sie unter Verwendung von Rechenoperationen aus e), dass jede Lösung von (*) auch die folgende Gleichung für $n = 2$ erfüllt (nach Hinweis in e) damit für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$):

$$M^n \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda^n \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \quad (**)$$

10 P

g) Weil a_1 und a_2 verschieden sind (Teilaufgabe f)), sind die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. Daher lässt sich z.B. der Vektor der Ausgangspopulation eindeutig darstellen als Linearkombination von $\begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Bestätigen Sie, dass gilt: $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = (50 - 15 \cdot \sqrt{5}) \cdot \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} + (50 + 15 \cdot \sqrt{5}) \cdot \begin{pmatrix} 4 - 2\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Begründen Sie, dass somit für die langfristige Entwicklung folgt:

$$M^n \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \lambda_1^n \cdot (50 - 15 \cdot \sqrt{5}) \cdot \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2^n \cdot (50 + 15 \cdot \sqrt{5}) \cdot \begin{pmatrix} 4 - 2\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (***)$$

und dass die Beobachtungen aus d) in diesem mathematischen Modell für die gesamte Populationsentwicklung tatsächlich zutreffen.

15 P

h) Die betrachtete Mäusepopulation soll nun mit einer Funktion f beschrieben werden.

- Leiten Sie aus (***) einen Funktionsterm $f(x)$ her, der die Gesamtpopulation x Jahre nach Beginn der Beobachtung beschreibt: $f(x) = \text{Anzahl der } M_1\text{-Mäuse} + \text{Anzahl der } M_2\text{-Mäuse}$.
- Vergleichen Sie die Wachstumsmodelle der Analysis mit den hier an einem Beispiel behandelten diskreten Modellen.

10 P

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Populationsgraph mit Begründung</p> <p>Matrix mit Begründung</p> <p>Der Populationsvektor P beginne mit der Population M_1 als erster Komponente. Dann muss für die Matrix M gelten: $M \cdot P = P'$ = Population 1 Jahr später. In der ersten Zeile stehen daher die Geburtenraten, in der 2. Zeile die Übergangsrate von M_1 nach M_2.</p> <p>Also heißt die Matrix $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$</p>	10	5	
b)	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 50 \end{pmatrix} = \text{Population nach 1 Jahr}$ $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 300 \end{pmatrix} = \text{Population nach 2 Jahren}$ <p>Da allein die Anzahl der Nachkommen der jungen Mäuse im dritten Jahr 10.000 beträgt ($4 \cdot 2.500$), wird die Grenze von 10.000 nach 3 Jahren überschritten.</p> <p>Alternativ: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2500 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10600 \\ 1250 \end{pmatrix} = \text{Population nach 3 Jahren .}$</p> <p><i>Hinweis: Operator „Angaben“ verlangt <u>keine</u> Begründung.</i></p>	10		
c)	<p>Matrix H:</p> <p>Durch die Umwelteinflüsse halbieren sich die Werte in der ersten Zeile der Matrix M, die ja die Neugeburten beschreiben. Die Überlebensraten in der zweiten Zeile bleiben unverändert. Das führt auf die Matrix $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$.</p> <p>Zusätzlich Maßnahmen zur Geburtenkontrolle:</p> <p>Mit $H_R = \begin{pmatrix} 2r & r \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}$ wird die Anzahl der Nachkommen weiter reduziert ($r < 1$).</p> <p>Die Population soll nach einem Jahr hinsichtlich der Anzahl unverändert sein:</p> <p>Ansatz: $\begin{pmatrix} 2r & r \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ führt auf $\begin{array}{l} I \quad 2rx + ry = x \\ II \quad 0,5x = y \end{array}$</p> <p>Aus Zeile II folgt unmittelbar, dass nur halb so viele M_2-Mäuse vorhanden sein dürfen wie M_1-Mäuse, damit eine Reproduktion überhaupt möglich ist.</p> <p>Eingesetzt in Zeile I ergibt sich: $2rx + 0,5rx = x \Leftrightarrow 2,5rx = x$. Da x als Anzahl der jungen Mäuse nicht Null sein kann, folgt daraus $2,5r = 1$ bzw. $r = 0,4$. Die Geburten müssen auf 40% reduziert werden, damit jedenfalls die erwähnte spezielle Anfangspopulation unverändert bleibt.</p>			20

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	<p>Geradengleichung:</p> <p>Wir betrachten $P_2 = (25 3)$ oder $P_3 = (106 12,5)$ als (Fast-)Punkte der Geraden. Steigung (1. Fall): $\frac{3}{25} = 0,12$, Steigung (2. Fall): $\frac{12,5}{106} \approx 0,1179$. Die Gleichung der Ursprungsgeraden lautet gerundet also $y = 0,12 x$.</p> <p>Interpretation (Vorschlag):</p> <p>Das Verhältnis der M_1-Mäuse zu den M_2-Mäusen ändert sich nach wenigen Generationen praktisch nicht mehr, aber die Gesamtzahl der Mäuse nimmt „explosionsartig“ zu (<i>tatsächlich exponentiell, aber das ist aus der Skizze noch nicht unbedingt zu erkennen</i>).</p> <p>Die obige Geradengleichung $y = 0,12 x$ bedeutet im Sachkontext der Aufgabe, dass die Anzahl der M_2-Mäuse (y) etwa 12% der Anzahl der M_1-Mäuse (x) ausmacht (oder dass die Anzahl der M_1-Mäuse (x) stets gut 8-mal so groß ist wie die der M_2-Mäuse (y)).</p>		10	
e)	<p>Es wird ein Nachweis erwartet (also (1) oder (2) oder (3)).</p> <p>(1) $M \cdot (c \cdot P_1) = c \cdot (M \cdot P_1)$</p> $\text{Linke Seite} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4ca_1 + 2ca_2 \\ 0,5ca_1 \end{pmatrix}$ $\text{Rechte Seite} = c \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) = c \cdot \begin{pmatrix} 4a_1 + 2a_2 \\ 0,5 \cdot a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4ca_1 + 2ca_2 \\ 0,5ca_1 \end{pmatrix}$ <p>(2) $M \cdot (P_1 + P_2) = M \cdot P_1 + M \cdot P_2$</p> $\text{Linke Seite} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 4a_1 + 4b_1 + 2a_2 + 2b_2 \\ 0,5a_1 + 0,5b_1 \end{pmatrix}$ $\text{Rechte Seite} = \left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) =$ $= \begin{pmatrix} 4a_1 + 2a_2 \\ 0,5 \cdot a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4b_1 + 2b_2 \\ 0,5 \cdot b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_1 + 4b_1 + 2a_2 + 2b_2 \\ 0,5a_1 + 0,5b_1 \end{pmatrix}$ <p>(3) $M^2 \cdot P_1 = (M \cdot M) \cdot P_1 = M \cdot (M \cdot P_1)$</p> $\text{Linke Seite} = \left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17a_1 + 8a_2 \\ 2a_1 + a_2 \end{pmatrix}$ $\text{Rechte Seite} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4a_1 + 2a_2 \\ 0,5 \cdot a_1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 16a_1 + 8a_2 + 1a_1 \\ 2a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17a_1 + 8a_2 \\ 2a_1 + a_2 \end{pmatrix}$		10	

		Lösungsskizze			Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III	I	II	III
f)	<p><i>Kenntnisse über Eigenwerte und Eigenvektoren werden nicht erwartet.</i></p> <p>Lösen der Gleichung:</p> $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} I \quad 4a + 2 = \lambda \cdot a \\ II \quad 0,5a = \lambda \end{array}, a = 2\lambda \text{ in I: } 8\lambda + 2 = 2\lambda^2.$ <p>Sortieren und Division durch 2 ergibt die quadratische Gleichung $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{5}$.</p> <p>Aus Gleichung II folgt unmittelbar $a_{1/2} = 2 \cdot \lambda_{1/2}$, und wir erhalten die folgenden beiden Lösungen:</p> <p>1. Lösung: $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5} \approx 4,24$, $a_1 = 2\lambda_1 = 4 + 2 \cdot \sqrt{5} \approx 8,47$ und 2. Lösung: $\lambda_2 = 2 - \sqrt{5} \approx -0,24$, $a_2 = 2\lambda_2 = 4 - 2 \cdot \sqrt{5} \approx -0,47$.</p> <p><u>Bemerkung:</u> Die beiden zugehörigen Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreiben keine real möglichen Mäusepopulationen, sie sind nur mathematische Konstrukte zur Gewinnung von Struktureinsichten über die realen Mäusepopulationen.</p> <p>Bestätigung der Formel:</p> $M^2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = M \cdot \left(M \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \right) = M \cdot \left(\lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \lambda \left(M \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \lambda \left(\lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \lambda^2 \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}.$ <p>Wie im Hinweis zu (3) in Teilaufgabe e) dargestellt, kann dieses Vorgehen auf beliebige natürliche Exponenten $n \geq 3$ fortgesetzt werden.</p>						10
g)	<p>Linearkombination:</p> $(50 - 15 \cdot \sqrt{5}) \cdot \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} + (50 + 15 \cdot \sqrt{5}) \cdot \begin{pmatrix} 4 - 2\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} (50 - 15 \cdot \sqrt{5})(4 + 2\sqrt{5}) \\ (50 - 15 \cdot \sqrt{5}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (50 + 15 \cdot \sqrt{5})(4 - 2\sqrt{5}) \\ (50 + 15 \cdot \sqrt{5}) \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 200 - 30 \cdot 5 + 200 - 30 \cdot 5 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ <p><i>Statt nachzurechnen ist natürlich auch die Herleitung erlaubt.</i></p> <p>Begründung für langfristige Entwicklung:</p> <p>Der Startvektor ist eine Linearkombination $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$.</p> <p>Also ist $M \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = M \cdot \left(s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = s \cdot \left(M \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + t \cdot \left(M \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$ $= s \cdot \left(\lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + t \cdot \left(\lambda_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \lambda_1 \cdot s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot t \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ <p>Aus Gleichung (**) und Rechenoperationen aus e) folgt schließlich (***)</p> </p>						

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Fortsetzung Teilaufgabe g)</p> <p>Bestätigung der Entwicklung nach d):</p> <p>Es gilt: $\lambda_1 \approx 4,24 \Rightarrow \lambda_1 > 1$ und $\lambda_2 \approx -0,24 \Rightarrow \lambda_2 < 1$.</p> <p>Der rechte Summand in (***) konvergiert deshalb für $n \rightarrow \infty$ komponentenweise gegen Null, und der linke Summand wächst für $n \rightarrow \infty$ exponentiell (mit dem Faktor $\lambda_1 \approx 4,24$) komponentenweise gegen Unendlich und dominiert sehr schnell das Geschehen. Die Vektoren des linken Summanden beschreiben also die langfristige Entwicklung der Population und liegen – wie schon in d) beobachtet – alle auf einer Ursprungsgeraden.</p> <p><u>Bemerkung:</u> Die Steigung dieser Ursprungsgeraden kann nun auch leicht exakt berechnet werden, da ja der Vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2 \cdot \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ auf dieser Geraden liegen muss. Die Steigung beträgt: $\frac{1}{4 + 2 \cdot \sqrt{5}} \approx 0,118$, was mit den abgelesenen Werten gut übereinstimmt, da die Konvergenzgeschwindigkeiten in diesem Beispiel sehr hoch sind.</p>	5		10
h)	<p>Stetiges Modell:</p> <p>Nach Teilaufgabe g) berechnet sich der Gesamtbestand der Population nach x Jahren mit $\lambda_1^x \cdot s \cdot (a_1 + 1) + \lambda_2^x \cdot t \cdot (a_2 + 1)$ mit λ_1, λ_2 und a_1, a_2 wie oben, sowie $s = 50 - 15\sqrt{5}$ und $t = 50 + 15\sqrt{5}$.</p> <p>Da $\lambda_2 < 1$, ist für größere x nur der 1. Summand von Bedeutung:</p> <p>$\lambda_1^x \cdot s \cdot (a_1 + 1) = (50 - 15\sqrt{5}) \cdot (5 + 2\sqrt{5}) \cdot \lambda_1^x \approx 155,90170 \cdot 4,23607^x$. Der 2. Faktor lässt sich auch mit der Eulerschen Zahl e darstellen. So ergibt sich als Funktionsterm:</p> <p>$f(x) = 155,90170 \cdot 4,23607^x$ oder $f(x) = 155,90170 \cdot e^{1,44364 \cdot x}$.</p> <p>Vergleich der Modelle:</p> <p>Die Modelle der Analysis sind als Funktionen relativ einfach zu handhaben. Die Langzeitentwicklung im Modell kann über die Herleitung von Eigenschaften der Funktion untersucht werden.</p> <p>Modelle lassen sich auch aus bestimmten Eigenschaften bilden. (z.B. wird ein Wachstumsvorgang mit einer Differentialgleichung charakterisiert, kann aus dieser die Funktion hergeleitet werden.)</p> <p>Die Daten und deren Entwicklung werden normalerweise in bestimmten Zeiträumen erfasst.</p> <p>Die Entwicklung der Gesamtpopulation setzt sich zusammen aus möglicherweise gegenteiligen Entwicklungen der Teilgruppen, in welche die Population unterteilt wurde.</p> <p>Diese Punkte sind in den <u>diskreten Modellen</u> berücksichtigt.</p>			

Lösungsskizze			Zuordnung, Bewertung																																																		
			I	II	III																																																
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Nach Jahr</th> <th>diskretes Modell</th> <th>stetiges Modell</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>650</td><td>660</td></tr> <tr><td>2</td><td>2.800</td><td>2.798</td></tr> <tr><td>3</td><td>11.850</td><td>11.851</td></tr> <tr><td>4</td><td>50.200</td><td>50.200</td></tr> <tr><td>5</td><td>212.650</td><td>212.650</td></tr> <tr><td>6</td><td>900.800</td><td>900.800</td></tr> <tr><td>7</td><td>3.815.850</td><td>3.815.850</td></tr> <tr><td>8</td><td>16.164.200</td><td>16.164.200</td></tr> <tr><td>9</td><td>68.472.650</td><td>68.472.650</td></tr> <tr><td>10</td><td>290.054.800</td><td>290.054.799</td></tr> <tr><td>11</td><td>1.228.691.850</td><td>1.228.691.847</td></tr> <tr><td>12</td><td>5.204.822.200</td><td>5.204.822.188</td></tr> <tr><td>13</td><td>22.047.980.650</td><td>22.047.980.593</td></tr> <tr><td>14</td><td>93.396.744.800</td><td>93.396.744.544</td></tr> <tr><td>15</td><td>395.634.959.800</td><td>395.634.958.694</td></tr> </tbody> </table>	Nach Jahr	diskretes Modell	stetiges Modell	1	650	660	2	2.800	2.798	3	11.850	11.851	4	50.200	50.200	5	212.650	212.650	6	900.800	900.800	7	3.815.850	3.815.850	8	16.164.200	16.164.200	9	68.472.650	68.472.650	10	290.054.800	290.054.799	11	1.228.691.850	1.228.691.847	12	5.204.822.200	5.204.822.188	13	22.047.980.650	22.047.980.593	14	93.396.744.800	93.396.744.544	15	395.634.959.800	395.634.958.694	<p><i>Nebstehender Vergleich wird natürlich nicht erwartet.</i></p> <p><i>Er zeigt die schnelle Konvergenz des rechten Summanden im Berechnungsterm gegen 0, der ja weggelassen wurde (s.o.).</i></p>				
Nach Jahr	diskretes Modell	stetiges Modell																																																			
1	650	660																																																			
2	2.800	2.798																																																			
3	11.850	11.851																																																			
4	50.200	50.200																																																			
5	212.650	212.650																																																			
6	900.800	900.800																																																			
7	3.815.850	3.815.850																																																			
8	16.164.200	16.164.200																																																			
9	68.472.650	68.472.650																																																			
10	290.054.800	290.054.799																																																			
11	1.228.691.850	1.228.691.847																																																			
12	5.204.822.200	5.204.822.188																																																			
13	22.047.980.650	22.047.980.593																																																			
14	93.396.744.800	93.396.744.544																																																			
15	395.634.959.800	395.634.958.694																																																			
Insgesamt 100 BWE			25	55	20	10																																															

Beispielaufgabe Pantheon

LA/AG

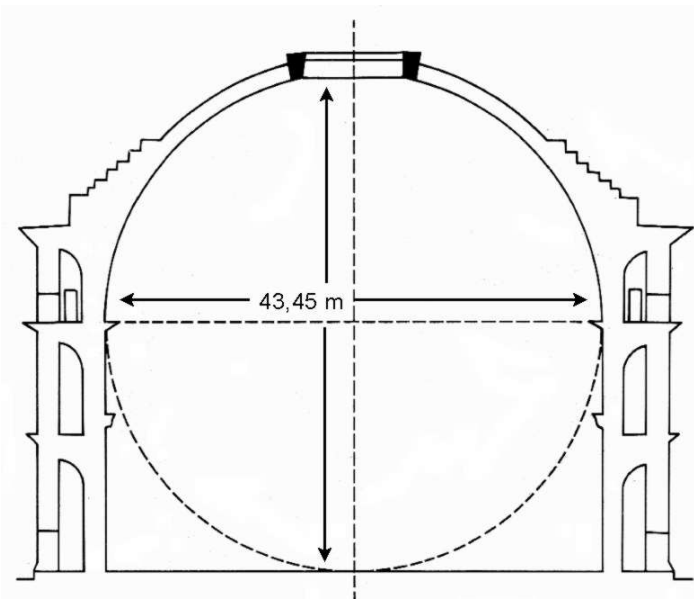
Diese Aufgabe behandelt Aspekte des größten und bekanntesten antiken Kuppelbaus in Rom (frühes 2. Jahrhundert n. Chr.).

Der Bau besteht aus mehreren Teilen (siehe Abbildung unten). Der beeindruckendste Teil des Bauwerks ist sicherlich die „Rotunde“, ein zylinderförmiger Raum mit aufgesetzter Kuppel, die im Innenraum halbkugelförmig ist (Abbildung rechts).

Die Höhe des Innenraumes entspricht dem Durchmesser von Kugel und Zylinder.

Die Höhe des Zylinders entspricht dem Radius der Kugel.

Die zur Kugel fortgesetzte Halbkugel würde also den Boden des Rundbaues gerade berühren.

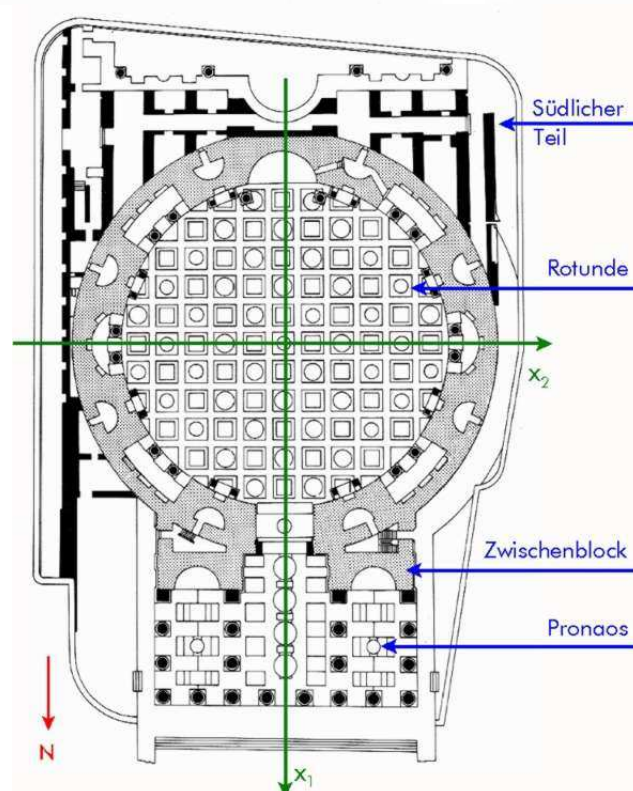


- a) Berechnen Sie die Mantelfläche des Zylinders und die Oberfläche der Halbkugel und deren Verhältnis zueinander, analog die Volumina von Zylinder und Halbkugel. **10 P**

Runden Sie in nachfolgenden Teilaufgaben Ihre Endergebnisse auf 2 Stellen nach dem Komma.

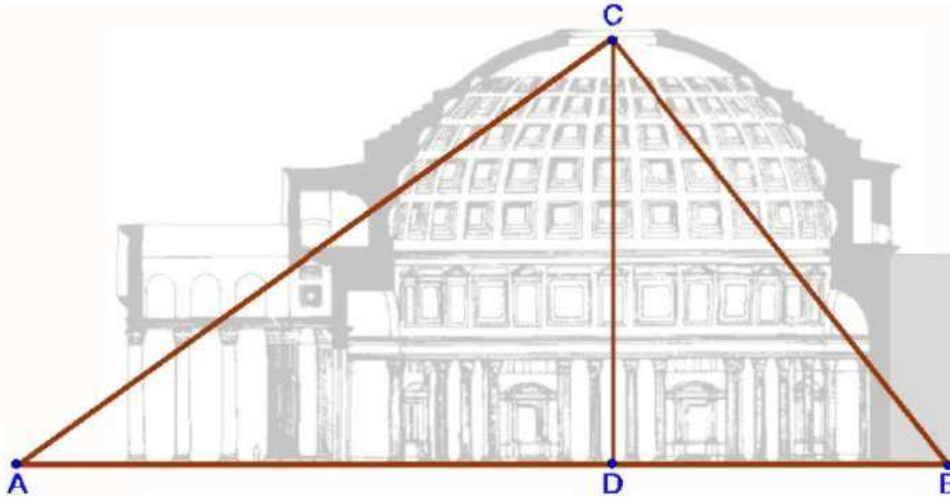
- b) Der Ursprung des Koordinatensystems sei im Mittelpunkt der Grundseite des Zylinders.
Die x_3 -Achse zeige nach oben, die x_2 -Achse nach Westen und die x_1 -Achse nach Norden (siehe Abbildung rechts).

- Bestimmen Sie nun die Gleichung der einbeschriebenen Kugel (Radius = 21,73 m).
- Leiten Sie damit eine mathematische Beschreibung der Halbkugel her und eine Beschreibung der oben in der Kuppel befindlichen kreisförmigen Lichtöffnung („Auge“), die einen Durchmesser von 9,45 m aufweist und deren Mittelpunkt auf der x_3 -Achse liegt. **15 P**



Grundriss des Gesamtbauwerks

- c) Skizzieren Sie nach den Daten aus b) die Rotunde in anliegendem Koordinatensystem. **15 P**



- d) Betrachten Sie ein Dreieck vom Podest vor dem Pronaos aus (Punkt A) bis zum Ende des Südlichen Teils (Punkt B), zum höchsten Punkt im Innern der Rotunde (Punkt C) und zurück zum Ausgangspunkt. Das Dreieck ABC und die Höhe CD liegen in der x_1x_3 -Ebene und D im Ursprung des Koordinatensystems.

Die Katheten der Teildreiecke ACD und BCD verhalten sich jeweils zueinander wie 3 : 4.

- Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A , B und C .
- Untersuchen Sie das Dreieck ABC .

15 P

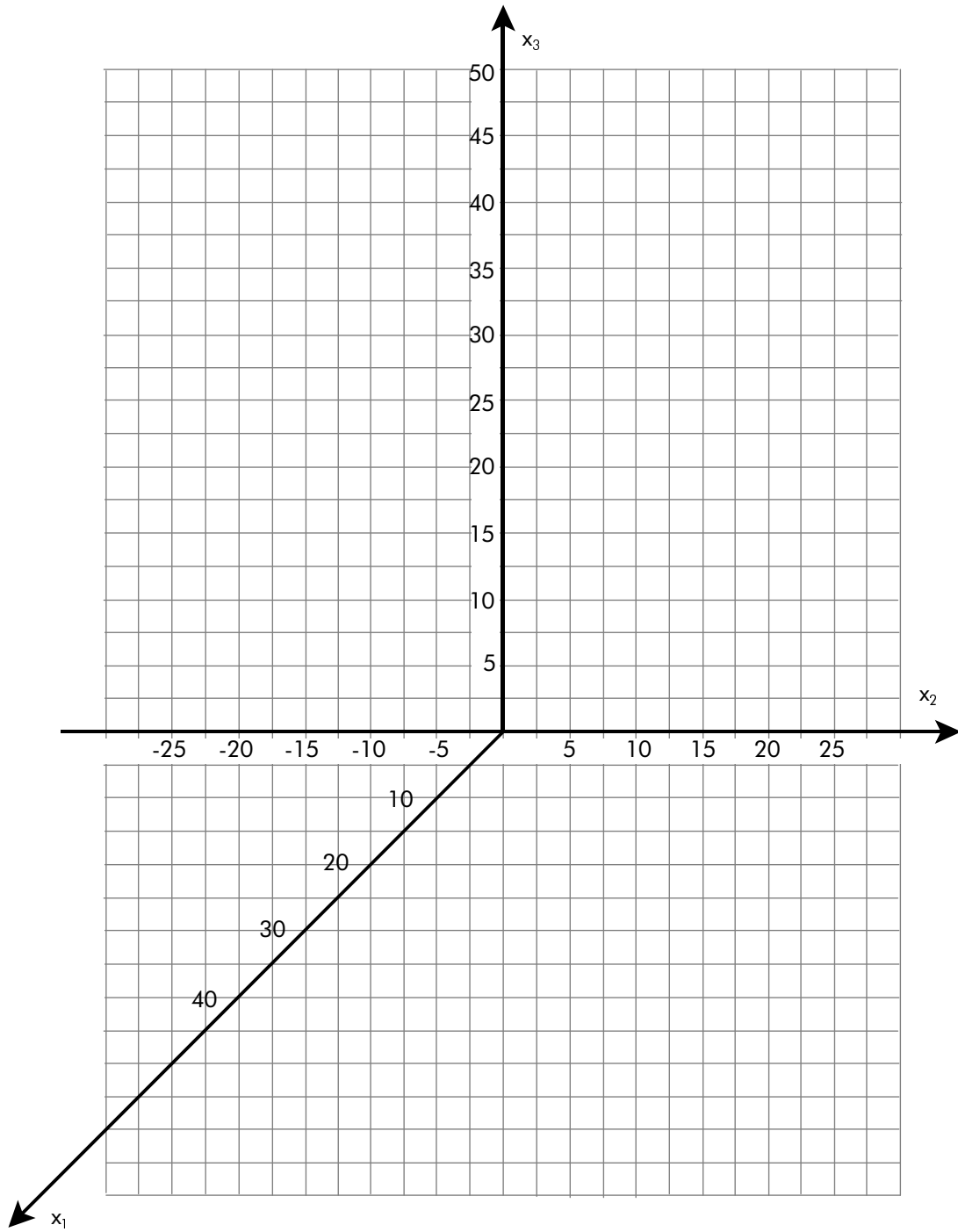
Fällt durch die Öffnung in der Kuppel (das Auge) helles Sonnenlicht, so ist auf dem Fußboden, an der Wand oder der Kuppelinnenseite ein Lichtfleck zu sehen.

- e) Zur Mittagszeit strahlt von Süden her paralleles Sonnenlicht in das „Auge“ in einem der Jahreszeit entsprechenden Winkel, gemessen gegen die Vertikale.
- Begründen Sie, dass die Form der Lichtscheibe kongruent zur Öffnung in der Kuppel ist, sofern Sie die Lichtscheibe vollständig im Bodenbereich befindet.
 - Bestimmen Sie den Bereich möglicher Winkel, sodass die Lichtscheibe vollständig auf den Bodenbereich der Rotunde trifft (also innerhalb der Grundseite des Zylinders).
Da der Durchmesser der Öffnung in der Außenwand der Kuppel geringer ist als der Durchmesser der Öffnung im Inneren, kann man vereinfachend diese Öffnung im Inneren als Ausgangspunkt der Abbildung annehmen.
 - Beschreiben Sie, wie die Lichtscheibe an einem Tag wandert und wie sich diese Bewegung im Laufe eines Jahres entwickelt, jeweils Sonnenschein vorausgesetzt.
- f) • Beschreiben Sie, wo der Punkt $K = (15 \mid 15,72 \mid 21,73)$ in der Rotunde liegt.
 K sei der unterste Punkt einer Lichtscheibe zu einer bestimmten Zeit.
- Ermitteln Sie die Geradengleichung, auf welcher der zugehörige Strahl vom „Auge“ bis zur Lichtscheibe verläuft, und den Winkel, den die Gerade zur Horizontalen einschließt.
 - Bestimmen Sie den obersten Punkt der Lichtscheibe.

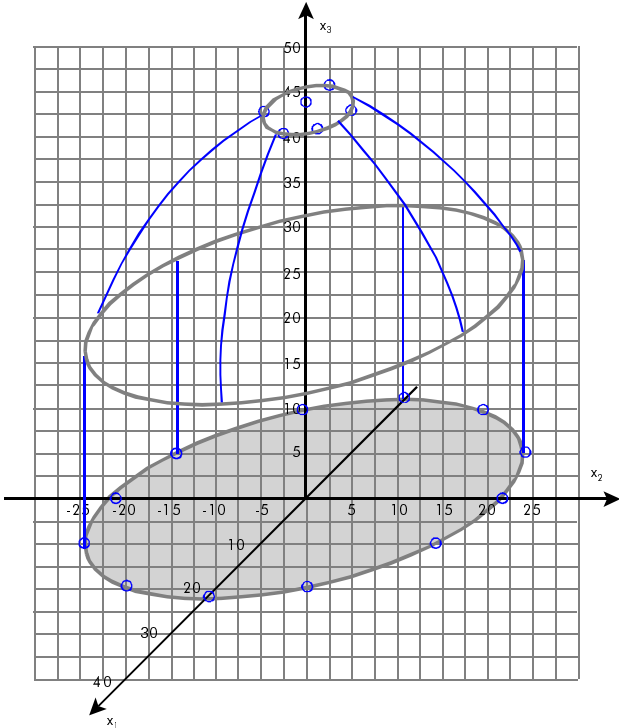
25 P

20 P

Anlage zur Aufgabe Pantheon

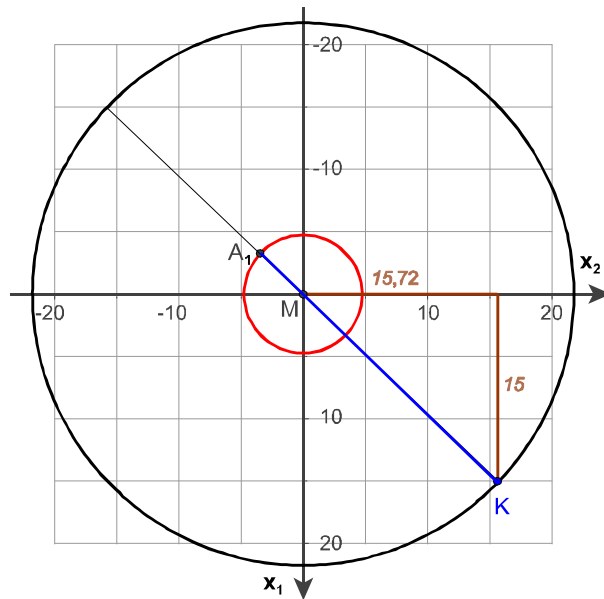


Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p><i>Eine elementargeometrische Aufgabe, bei der das Ergebnis vielleicht verblüfft. Der konkrete Zahlenwert des Durchmessers spielt keine Rolle.</i></p> <p><u>Mantelfläche Zylinder / Oberfläche Halbkugel:</u> Es gilt beim Zylinder Radius $r =$ Höhe h und damit $M_Z = 2\pi r^2$ Oberfläche Kugel $= 4\pi r^2$ und daher gilt für die Halbkugel $O_H = 2\pi r^2$ Die beiden Flächen sind gleich und damit ist $M_Z : O_H = 1 : 1$</p> <p><u>Volumen Zylinder / Volumen Halbkugel:</u> $V_Z = \pi r^3$ und $V_H = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi r^3$. Damit ist $V_Z : V_H = 3 : 2$.</p>			
b)	<p><u>Kugel:</u> Mittelpunkt $= M_K = (0 0 21,73)$. Die Koordinatengleichung der Kugel lautet daher $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 21,73)^2 = 21,73^2$, für die Halbkugel mit der Einschränkung $x_3 \geq 21,73$.</p> <p><u>Auge:</u> Berechnung der Höhe des Kugelabschnitts mit den gegebenen Radien: $r_o^2 = h \cdot (2r_k - h)$ ergibt eine quadratische Gleichung in h, nämlich $h^2 - 2r_k \cdot h + r_o^2 = 0$, also $h_{1,2} = r_k \pm \sqrt{r_k^2 - r_o^2}$</p> <p>$r_k = 21,73$ und $r_o = 4,725$ eingesetzt ergibt gerundet $h_1 = 0,52$ und $h_2 = 42,94$. Die Punkte des Begrenzungskreises haben daher die x_3-Koordinate 42,94. Für die x_1- und x_2-Koordinaten gilt $x_1^2 + x_2^2 = 4,725^2$ (bzw. gerundet $4,73^2$).</p>			
c)	 <p><i>Es sind Punkte auf dem Boden des Zylinders zu bestimmen, z.B. $(\pm 21,73 0 0)$, $(0 \pm 21,73 0)$ und $(\pm 10 \pm 19,29 0)$ bzw. $(\pm 19,29 \pm 10 0)$.</i></p> <p><i>Diese Koordinaten können auch mit $x_3 = 21,73$ verwendet werden.</i></p> <p><i>Der höchste Punkt der Kuppel (Innenraum) wäre bei $(0 0 43,45)$.</i></p> <p><i>Koordinaten des „Auges“ (Rand) ermittelt man wie oben, z.B. $(\pm 4,73 0 42,94)$ oder $(\pm 3 \pm 3,66 42,94)$</i></p>			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	<p>$C = (0 \mid 0 \mid 43,45)$ und $CD = 43,45$ nach dem Eingangstext.</p> <p>Dreieck BCD: $\frac{ BD }{ CD } = \frac{3}{4} \Rightarrow BD = 0,75 \cdot 43,45 \approx 32,59$. Damit gilt $B = (-32,59 \mid 0 \mid 0)$, denn B liegt im negativen Bereich der x_1-Achse.</p> <p>Dreieck ACD: $\frac{ AD }{ CD } = \frac{4}{3} \Rightarrow AD = \frac{4}{3} \cdot 43,45 \approx 57,93$ und damit $A = (57,93 \mid 0 \mid 0)$.</p> <p>Es handelt sich bei ABC um ein rechtwinkliges Dreieck, denn</p> $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -57,93 \\ 0 \\ 43,45 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 32,59 \\ 0 \\ 43,45 \end{pmatrix}. \text{ Diese Vektoren stehen senkrecht aufeinander,}$ <p>weil $\begin{pmatrix} -57,93 \\ 0 \\ 43,45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32,59 \\ 0 \\ 43,45 \end{pmatrix} = -0,0362 \approx 0$.</p> <p><i>Es ergibt sich genau 0, wenn man bei BD und AD nicht rundet.</i></p> <p><i>Hinweis: Der Nachweis, dass ABC ein rechtwinkliges Dreieck ist, kann auch mit Mitteln der ebenen Geometrie aus den Verhältnissen der Katheten der beiden Teildreiecke geschlossen werden.</i></p>	15		
e)	<p>Boden und „Auge“ liegen in parallelen Ebenen, die einfallenden Sonnenstrahlen werden als parallel angenommen. Damit kann die Abbildung mit Parallelogrammen beschrieben werden. Der Lichtfleck ist also ein Kreis, kongruent zur Öffnung im Inneren der Kuppel.</p> <p>Der Strahl, der gerade noch auf den Boden trifft und vom nördlichen Randpunkt des „Auges“ in der x_1x_3-Ebene ausgeht, markiert den größtmöglichen Winkel. Nördlicher Randpunkt = $N \approx (4,73 \mid 0 \mid 42,94)$, Nördlichster Bodenpunkt = $P_N \approx (21,73 \mid 0 \mid 0)$.</p> <p>Die Gerade g_N durch N und P_N hat den Richtungsvektor $\overrightarrow{NP_N} = \begin{pmatrix} 17,00 \\ 0 \\ -42,94 \end{pmatrix}$.</p> <p>Er weist zur Vertikalen einen Winkel von $\alpha \approx 21,6^\circ$ auf, da $\tan \alpha = \frac{17,00}{42,94}$.</p> <p>Vom höchst möglichen Sonnenstand bis zu einem Einfallswinkel von $21,6^\circ$ liegt der Lichtfleck vollständig im Bodenbereich.</p> <p><u>Wandern der Lichtscheibe:</u> Sie bewegt sich von einem Wand- oder Kuppelpunkt der westlichen Seite der Rotunde in Richtung des Fußbodens und zugleich in Richtung der östlichen Seite. Nach Überschreiten der x_1-Achse kehrt sich die zuerst genannte Bewegung um. Diese Bewegung gilt prinzipiell für jeden Tag, jedoch sind Länge und Auslenkung der Bewegung abhängig von der Jahreszeit.</p>		25	

Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	<p>$K = (15 \mid 15,72 \mid 21,73)$ liegt zunächst in einer Ebene parallel zum Boden, auf welcher der Zylinder in die Halbkugel übergeht, da die x_3-Koordinate 21,73 ist (Kugelradius). Er liegt auf einem Kreis um $M = (0 \mid 0 \mid 21,73)$ mit dem Radius $r = 21,73$, denn $\sqrt{15^2 + 15,72^2} \approx 21,73$.</p> <p>Er liegt also auf der Wand der Rotunde direkt am Übergang vom Zylinder zur Halbkugel. Die Ebenen, in der K und die Lichtöffnung liegen, sind parallel.</p> <p>Der Strahl verläuft in einer Ebene, die senkrecht zur x_1x_2-Ebene liegt und den Koordinatenursprung und Punkt K enthält.</p> <p>Da die x_1- und x_2-Koordinate jeweils positiv ist, liegt K im Nordwesten. Der zugehörige Strahl kommt daher aus südöstlicher Richtung (siehe obige Abbildung). Wegen der Kongruenz (siehe d)) können die x_1- und die x_2-Koordinate des Ausgangspunktes A_1 des Strahls entsprechend der Skizze bestimmt werden, z.B. mithilfe des Strahlensatzes:</p> <p>Sei $A_1 = (a \mid b \mid 42,94)$. Dann gelten die beiden folgenden Bedingungen für a und b:</p> <ul style="list-style-type: none"> A liegt am Rand des Auges, also auf einem Kreis mit dem Radius 4,73 $a^2 + b^2 = 4,73^2$ Nach dem Strahlensatz ist $\frac{ a }{ b } = \frac{15}{15,72}$. <p>Damit ist $a^2 = \left(\frac{15}{15,72}\right)^2 b^2$. Eingesetzt in die Kreisbedingung folgt</p> $\left(\left(\frac{15}{15,72}\right)^2 + 1\right) b^2 \approx 4,73^2 \Rightarrow b \approx 3,42 \text{ und weiter } a \approx 3,26.$ <p>Wegen der Lage der Punkte A_1 bzw. K müssen die beiden fehlenden Koordinaten von A_1 negativ sein, also</p> $A_1 = (-3,26 \mid -3,42 \mid 42,94).$ <p>Die Gerade, auf welcher der Strahl verläuft, hat dann z.B. die Gleichung</p> $g_u : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3,26 \\ -3,42 \\ 42,94 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 18,26 \\ 19,14 \\ -21,21 \end{pmatrix}.$			



	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
<p>$A_2 = (3,26 \mid 3,42 \mid 42,94)$ liegt dem Punkt A_1 auf dem Rand des „Auges“ direkt gegenüber. Die zu g_u parallele Gerade durch A_2 markiert den Verlauf des Lichtstrahls zum obersten Punkt der Scheibe. Da aber die parallele Ebene begrenzt ist, ergibt sich als oberster Punkt der Schnittpunkt jener Gerade mit der Halbkugel (siehe Abbildung).</p> <p>Parallele Gerade:</p> $g_o : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3,26 \\ 3,42 \\ 42,94 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 18,26 \\ 19,14 \\ -21,21 \end{pmatrix}$ <p>Schnittpunktberechnung:</p> <p>Koordinaten einsetzen in Kugelgleichung:</p> $(18,26\lambda + 3,26)^2 + (19,14\lambda + 3,42)^2 + (42,94 - 21,21\lambda - 21,73)^2 = 21,73^2$ <p>Das ist eine etwas rechenintensive quadratische Gleichung in λ, die gerundet die beiden Lösungen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0,5652$ liefert. Da A_2 auf der Kugel liegt, war die erste Lösung zu erwarten. Die zweite Lösung eingesetzt liefert der Punkt $S = (13,58 \mid 14,24 \mid 30,95)$.</p> <p>Winkelberechnung:</p> <p>Sei $R = \begin{pmatrix} 18,26 \\ 19,14 \\ -21,21 \end{pmatrix}$ und $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dann ist der mit der Vertikalen eingeschlossene Winkel $\alpha = \arccos\left(\frac{R \cdot V}{ R \cdot V }\right) \approx 51,28^\circ$</p>				
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Hinweise:

Die Aufgabe Pantheon ist nicht als Beispiel für eine Abituraufgabe gedacht, wohl aber als Übungsaufgabe zum Abitur.

Man benötigt zur Lösung der Aufgabe u.a. räumliches Vorstellungsvermögen.

Kenntnisse der ebenen Geometrie werden wiederholt, z.T. in Kombination mit der analytischen Geometrie.

Beim Einsatz der Aufgabe im Grundkurs eventuell die Teilaufgabe f) streichen und zusätzliche Hilfen geben.